Distributions vectorielles homogènes sur une algèbre de Jordan

Bruno Blind

Distributions vectorielles homogènes sur une algèbre de Jordan

Bruno Blind
Institut Elie Cartan, U.M.R 7502
Université H.Poincaré, B.P.239, 54506 Vandoeuvre-lés-Nancy.

Publish or perish.

A Marraine.
"On reste là, il fait si bon parfois quand le soir tombe
et qu'on regarde simplement ses mains."
C. Esteban

e-mail: blind@iecn.u-nancy.fr
tel: 0383684587; fax: 0383684534

Abstract: We study distributions on a Euclidean Jordan algebra V with values in a finite dimensional representation space for the identity component G of the structure group of V and homogeneous equivariance condition. We show that such distributions exist if and only if the representation is spherical, and that then the dimension of the space of these distributions is $r+1$ (where r is the rank of V). We give also construction of these distributions and of those that are invariant under the semi-simple part of G.

Classification AMS: 46F10,17C.

Mots clefs: Distributions homogènes, Distributions vectorielles, Algèbres de Jordan.

I. Introduction.

Soient V une algèbre de Jordan réelle, simple et euclidienne et G la composante neutre de son groupe de structure (voir le paragraphe II pour les rappels sur les algèbres de Jordan; on peut ici prendre pour V l'espace $\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles d'ordre r, et pour G le groupe $\mathrm{SL}(r,\mathbb{R})$ agissant par: $g.X = gX^tg$). Soit d'autre part (π, L_π) une représentation irréductible de dimension finie de G. Le but de cet article est l'étude des distributions homogènes sous l'action de G à valeurs dans l'espace L_π. Nous montrons, dans les paragraphes III et V, que de telles distributions non nulles existent si et seulement si la représentation π est sphérique, et que dans ce cas la dimension de l'espace des distributions homogènes de degré donné est égal aux nombres d'orbites ouvertes du groupe G, résultat bien connu dans le cas scalaire (cf [Ri.-St.], [Mu.] par exemple). Nous construisons, au paragraphe IV, ces distributions homogènes. Nous déterminons aussi, au paragraphe V, l'espace des distributions G^1-invariantes (où G^1 est la "partie semi-simple" du groupe G) portées par le lieu singulier de l'algèbre de Jordan.

Nos démonstrations s'inspirent de celles élaborées par F. Ricci et E.M.Stein dans leur travail ([Ri.-St.]) consacré aux distributions homogènes sur les matrices hermitiennes; en particulier la démonstration de la caractérisation des représentations, obtenue au paragraphe III, est une adaptation du lemme 5 de [Ri.-St.] (dans [Bl.1], nous avions déja étendu ce lemme au cas scalaire pour toute algèbre de Jordan simple et euclidienne).

Ce travail constitue une généralisation naturelle de certains résultats que J.A.C.Kolk et V.S. Varadarajan ont obtenus pour les distributions $\mathrm{SO}_o(1,n)$-invariantes sur $\mathbb{R}^{1+n}$ à valeurs dans l'espace d'une représentation irréductible de dimension finie du groupe $\mathrm{SO}_o(1,n)$, et à support dans la nappe supérieure du cône de lumière (voir [Kol.-Va.1] ainsi que [Kol.-Va.2]).

Signalons aussi l'article de J.Hilgert et K.H.Neeb ([Hi.-Ne.]), où les auteurs étudient les distributions de Riesz vectorielles sur les algèbres de Jordan euclidiennes.

Je remercie J.L.Clerc de m'avoir signalé le travail de J.A.C.Kolk et V.S. Varadarajan, H. Rubenthaler de ses (nombreux) encouragements amicaux ainsi que P.Y. Gaillard et F. Chargois pour les discussions que nous avons eues ensemble.

II. Rappels sur les algèbres de Jordan.

A. Les algèbres de Jordan simples et euclidiennes.

Nous renvoyons à [Br.-Koe.], [Fa.-Ko.], [Sa.1] pour les définitions et les principaux faits concernant les algèbres de Jordan, et reprenons ici les rappels de [Bl].

Soit V une algèbre de Jordan euclidienne sur le corps $\mathbb{R}$, simple, de dimension n, de rang r et d'élément unité e. Pour x et y dans V, on définit les endomorphismes de V:
$\mathrm{L}(x)y = xy$, $\mathrm{P}(x) = 2\mathrm{L}^2(x) - \mathrm{L}(x^2)$ et $x\Box y = \mathrm{L}(xy) + [\mathrm{L}(x), \mathrm{L}(y)]$.
On munit V de la forme bilinéaire définie positive $< x, y >= \frac{r}{n}\mathrm{trL}(xy)$; si g est un élément de $\mathrm{GL}(V)$, on note par g^* son adjoint par rapport à ce produit scalaire; par ailleurs dx désignera la mesure euclidienne associée au produit $< ., . >$.

On note $\det x$ le déterminant de V. C'est un polynôme irréductible et homogène de degré r. Un élément x de V est inversible si $\det x \neq 0$. Nous noterons $\mathrm{Det}g$ le déterminant d' un élément g de $\mathrm{GL}(V)$, et $V^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de l'algèbre V.

Tout élément x de l'algèbre V peut s'écrire sous la forme: $x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$ où $\{e_1, \ldots, e_r\}$ est un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux (dépendant de x). Les nombres λ_i sont appelés les valeurs propres de x et l'on a: $\det x = \prod_{i=0}^{r} \lambda_i$. Le rang de x est le nombre de réels λ_i non nuls (comptés avec multiplicité). Si un élément inversible x possède p valeurs propres positives et q valeurs propres négatives, on dira que sa signature est (p, q) $(p + q = r)$. On note Ω_j l'ensemble des éléments inversibles de signature $(r - j, j)$. Le cône $\Omega = \Omega_0$ est la composante connexe contenant e de l'ensemble des éléments inversibles de V.

Notons G la composante neutre du groupe $G(\Omega)$ des isomorphismes linéaires de V préservant le cône Ω (c'est aussi la composante neutre du groupe de structure de V); on a la décomposition $G = \mathbb{R}^{+*} \times G^1$ où $G^1 = \{g \in G / \mathrm{Det}g = 1\}$ est un groupe de Lie connexe, semi-simple de centre trivial. Fixons un système complet d'idempotents orthogonaux $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de l'algèbre V. Le groupe G admet une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ où K est le sous-groupe de G des éléments qui fixent l'unité e, A est engendré par les $\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{r} a_i e_i)$ (avec $a_i > 0$), et où N est engendré par les transformations de Frobenius $\exp(2z\Box e_j)$ avec z dans $V_{ij} = \{x \in V / e_i x = e_j x = \frac{1}{2}x\}$,$i < j$ (pour tout ceci voir [Fa.-Ko.]); rappelons que tous les espaces V_{ij} sont de même dimension d et que l'on a $n = r + \frac{dr(r-1)}{2}$. Notons que ce choix de N n'est pas celui de [Fa.-Ko.]: notre N correspond à leur $\bar{N}$.

Les orbites de V sous l'action du groupe G ont été déterminées par S.Kaneyuki et I.Satake (cf.[Ka.], [Sa.2]): ce sont les ensembles $S_{p,q} = Go_{p,q}$ où $o_{p,q} =$

$\sum_{i=1}^{p-q} e_i - \sum_{i=1}^{q} e_{p-q+i}$ (avec $0 \leq q \leq p \leq r$); en particulier la signature est invariante sous G. Pour $p = r$ les orbites $S_{p,q}$ sont ouvertes et l'on a : $S_{r,q} = \Omega_q$; les autres orbites sont contenues dans le lieu singulier $S = \{x \in V \ / \ \det x = 0\}$ de l'algèbre V et sont en fait des G^1 orbites. Pour une telle orbite singulière, notons T_{pq} (resp. N_{pq}) l'espace tangent (resp. l'espace normal) en $o_{p,q}$. On vérifie alors facilement que si

$$V = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}$$

est la décomposition de Peirce associée au système $\{e_1, \ldots, e_r\}$, l'espace N_{pq} s'identifie à: $\bigoplus_{p<i\leq j\leq r} V_{ij}$ et T_{pq} à: $\bigoplus_{\substack{1\leq i\leq j\leq r \\ i\leq p}} V_{ij}$.
En particulier, N_{pq} est une algèbre de Jordan simple et euclidienne de rang $r-p$ que nous noterons $V_{(r-p)}$. Remarquons que $W_{pq} = \bigcup_{p'=p}^{r} \bigcup_{q'=q}^{q+p'-p} S_{p'q'}$, est un voisinage ouvert de l'orbite S_{pq}, invariant sous G.

Soit $V^{\mathbb{C}}$ la complexifiée de l'algèbre V, le groupe $G_{\mathbb{C}}$, composante neutre du groupe de structure de $V^{\mathbb{C}}$, est un complexifié de G, au sens où son algèbre de Lie est une complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G. On note $G^1_{\mathbb{C}}$ le sous-groupe connexe de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie ${\mathfrak{G}^1}_{\mathbb{C}}$ complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}^1$ de G^1.

Rappelons brièvement la classification des algèbres de Jordan sur $\mathbb{R}$ simples et euclidiennes ainsi que de leur complexifié([Br.Koe.], [Fa.-Ko.], [Sp.]), on donne aussi l'indice $(G(\Omega) : G)$ de G dans $G(\Omega)$:

1) $V = \mathbb{R}$, le groupe G^1 est ici trivial.

2) $V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})(\ r > 1)$, l'espace des matrices symétriques réelles d'ordre r avec

$$x.y = \frac{1}{2}(xy + yx) \qquad d = 1 \qquad n = \frac{r(r+1)}{2} \qquad < x, y >= \mathrm{tr}xy$$

Ici le déterminant est le déterminant usuel. Le groupe G^1 est $\mathrm{PSL}(r, \mathbb{R})$ agissant par: $g.X = gX^tg$. On a $V^{\mathbb{C}} = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C})$ et $G^1_{\mathbb{C}}$ est le groupe des transformations linéaires $g.X = gX^tg$ avec g dans $\mathrm{SL}(r, \mathbb{C})$, c'est à dire s'identifie à $SL(r, \mathbb{C})/\{Id, (-1)^{r+1}Id\}$. On a $(G(\Omega) : G) = 2$ si n est pair et 1 sinon.

3) $V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{C})(\ r > 1)$, l'espace des matrices hermitiennes complexes d'ordre r avec

$$x.y = \frac{1}{2}(xy + yx) \qquad d = 2 \qquad n = r^2 \qquad < x, y >= \mathrm{tr}xy$$

Ici encore le déterminant est le déterminant usuel. Le groupe G^1 est $\mathrm{PSL}(r, \mathbb{C})$ agissant par: $g.X = gX^t\bar{g}$. On a $V^{\mathbb{C}} = \mathrm{Mat}(r, \mathbb{C})$ et $G^1_{\mathbb{C}}$ est le groupe des transformations linéaires $(g_1, g_2).X = g_1Xg_2^{-1}$ avec g_1 et g_2 dans $\mathrm{SL}(r, \mathbb{C})$. Enfin $(G(\Omega) : G) = 2$.

4) $V=\mathrm{Herm}(r,\mathbb{H})(\ r>2)$, l'espace des matrices hermitiennes sur $\mathbb{H}$ d'ordre r, avec le produit $x.y=\frac{1}{2}(xy+yx)$. Ici $d=4$. On peut aussi voir l'algèbre V dans l'espace des matrices antisymétriques $\mathrm{Alt}(2r,\mathbb{C})$: $V=\{x\in \mathrm{Alt}(2r,\mathbb{C})/J\bar{x}=xJ\}$ avec la multiplication $x.y=\frac{1}{2}(xJy+yJx)$ où J est la matrice

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe G^1 est $\mathrm{PSL}(r,\mathbb{H})$ agissant par: $g.X=gX^tg$.

On a $V^{\mathbb{C}}=\mathrm{Alt}(2r,\mathbb{C})$ et $G^1_{\mathbb{C}}$ est le groupe des transformations linéaires $g.X=gX^tg$ avec g dans $\mathrm{SL}(2r,\mathbb{C})$. Le déterminant est donné par le Pfaffien: $\det x=\mathrm{Pf}(JxJ)$ et $(G(\Omega):G)=1$.

5) $V=\mathbb{R}\times E$, où E est un espace euclidien de produit scalaire $(.,.)_E$, de dimension $n-1$,avec $n>4$. Le produit de Jordan est défini par: $(\lambda,u)(\mu,v)=(\lambda\mu+(u,v)_E,\lambda v+\mu u)$; ici $r=2$, $d=n-2$ et le déterminant est donné par: $\det(\lambda,u)=\lambda^2-\|u\|^2_E$.Le groupe G^1 est la composante neutre de $\mathrm{SO}(1,n-1)$ agissant naturellement sur V. On a $V^{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1}$ et $G^1_{\mathbb{C}}=\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$. $(G(\Omega):G)=2$.

6) L'algèbre de Jordan exceptionnelle $\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$ constituée de matrices $(3,3)$ à coefficients dans les octaves de Cayley ($d=8$, $r=3$, $n=27$), dans ce cas on sait que le groupe $G^1_{\mathbb{C}}$ est le groupe complexe simplement connexe E_6. $(G(\Omega):G)=1$.

Quelques remarques pour terminer ce paragraphe. Si x est un élément inversible de V tel que $\mathrm{P}(x)e=e$, $\mathrm{P}(x)$ appartiendra à $G(\Omega)$; c'est en particulier le cas des $g_i=\mathrm{P}(e_1+\ldots-e_i+\ldots+e_r)$ pour $1\leq i\leq r$. Il existe un automorphisme w_i de l'algèbre V tel que $w_i(-e_1+\ldots+e_r)=e_1+\ldots-e_i+\ldots+e_r$, et par conséquent $g_i=w_ig_1w_i^{-1}$; il en résulte facilement que tous les g_i appartiennent à la même composante connexe du groupe $G(\Omega)$. Enfin, on vérifie aisément que $\mathrm{P}(e_1+\ldots-e_i+\ldots-e_j+\ldots+e_r)=g_ig_j$, par conséquent les transformations $\mathrm{P}(e_1+\ldots-e_i+\ldots-e_j+\ldots+e_r)$ appartiennent à G.

B. La décomposition de Gauss.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}=\{V\square V\}$ est réductive d'involution de Cartan $\theta:X\mapsto -X^*$, de décomposition de Cartan $\mathfrak{G}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ avec: $\mathfrak{k}=\{[\mathrm{L}(x),\mathrm{L}(y)]/x,y\in V\}$ et $\mathfrak{p}=\{\mathrm{L}(x)/x\in V\}$. Considérons la décomposition de Cartan de $\mathfrak{G}^1$: $\mathfrak{G}^1=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}^1$ où $\mathfrak{p}^1=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{G}^1$.
On pose:

$$\mathfrak{a}^1=\{\mathrm{L}(\sum_{i=1}^r a_ie_i)/a_i\in\mathbb{R},\sum_{i=1}^r a_i=0\}$$

c'est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}^1$; les racines restreintes associées étant les $\gamma_{ij} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{2}, 1 \leq i, j \leq r$ (avec $\varepsilon_i(\mathrm{L}(e_i)) = \delta_{ij}$). On a une décomposition d'Iwasawa (associée à un choix d'ordre sur les racines): $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}^1 \oplus \mathfrak{n}$ avec: $\mathfrak{n} = \sum_{i<j} \mathfrak{g}_{ij}$ où $\mathfrak{g}_{ij} = V_{ij} \Box e_j$. Rappelons que ce choix n'est pas celui de [Fa.-Ko.]: notre $\mathfrak{n}$ correspond à leur $\bar{\mathfrak{n}}$.

Soit $\mathfrak{h}^-$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{m}$ (où $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{k}/\forall i, Xe_i = 0\}$), alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^- \oplus \mathfrak{a}^1$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{G}^1$ et $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de Cartan de ${\mathfrak{G}^1}_{\mathbb{C}}$. On a une décomposition de Cartan de ${\mathfrak{G}^1}_{\mathbb{C}}$:

$${\mathfrak{G}^1}_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}^1) \oplus (i\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^1)$$

$i\mathfrak{h}^- \oplus \mathfrak{a}^1$ est un sous-espace de Cartan de $(i\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^1)$ et on a la décomposition d'Iwasawa : ${\mathfrak{G}^1}_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}^1) \oplus i\mathfrak{h}^- \oplus \mathfrak{a}^1 \oplus \mathfrak{n}'$. Pour un certain choix de l'ordre sur les racines, on aura: $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathfrak{m}}$ où $\mathfrak{n}_{\mathfrak{m}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ et où $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \sum_{i<j} V_{ij}^{\mathbb{C}} \Box e_j$.

Soient N', $\bar{N}'$, $N_{\mathbb{C}}$, $N_{\mathfrak{m}}$, $M_{\mathbb{C}}$ et D les sous-groupes connexes de $G^1_{\mathbb{C}}$ d'algèbres de Lie $\mathfrak{n}'$, $\bar{\mathfrak{n}'}$, $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Le groupe $M_{\mathbb{C}}$ normalise $N_{\mathbb{C}}$ et on a $N' = N_{\mathbb{C}}.N_{\mathfrak{m}} = N_{\mathfrak{m}}.N_{\mathbb{C}}$.
La décomposition de Gauss de $G^1_{\mathbb{C}}$ (voir [Ze.]) nous dit qu'il existe un ouvert $(G^1_{\mathbb{C}})\mathrm{reg}$ dense tel que

$$(G^1_{\mathbb{C}})\mathrm{reg} = \bar{N}'.D.N'.$$

Rappelons que tout élément n de $N_{\mathbb{C}}$ s'écrit de manière unique sous la forme $n = \tau(z^{(2)}) \dots \tau(z^{(r)})$, avec $z^{(j)} \in \bigoplus_{k=1}^{j-1} V_{kj}^{\mathbb{C}}$ et $\tau(z^{(j)}) = \exp(2z^{(j)} \Box e_j)$.

Enfin on sait ([Bl.2]) que les éléments z de $V^{\mathbb{C}}$, inversible par rapport à tous les $\sum_{k=1}^{i} e_k$ $(1 \leq i \leq r)$, s'écrivent sous la forme:

$$z = \tau(z_{(1)}) \dots \tau(z_{(r-1)}) \sum_{k=1}^{r} a_k e_k$$

avec $\tau(z_{(j)}) = \exp(2z_{(j)} \Box e_j)$, où $z_{(j)} \in \bigoplus_{k=j+1}^{r} V_{jk}^{\mathbb{C}}$, les a_k étant des nombres complexes non nuls; si l'élément z est dans V, les nombres a_k seront réels et $z_{(j)} \in \bigoplus_{k=j+1}^{r} V_{jk}$.

Rappelons pour terminer, (voir par exemple [Ze.]) que si π est une représentation holomorphe de poids dominant λ de $G^1_{\mathbb{C}}$, on peut la voir comme agissant dans un espace F_λ de fonctions analytiques sur N' de la manière suivante: $\pi(g)f(z) = \lambda(zg)f(z_g)$ où f est un élément de F_λ, z est dans N', g dans $(G)_{\mathbb{C}}$ (pourvu que zg soit dans $(G^1_{\mathbb{C}})\mathrm{reg}$, et alors z_g est la N'-composante de zg). Comme le poids dominant est analytique, il est entièrement défini par les valeurs qu'il prend sur A^1 et sur $\exp(\mathfrak{h}^-)$.

C. Les représentations du groupe G.

Donnons pour commencer, la décomposition de l'espace $\mathcal{P}(V)$ des polynômes sur V, à valeurs complexes, sous l'action naturelle du groupe G. Les sous-espaces $V^{(k)} = \{x \in V/(e_1 + \ldots + e_k)x = x$ (resp. $V_{(k)} = \{x \in V/(e_{r-k+1} + \ldots + e_r)x = x)$ $(1 \leq k \leq r)$ sont des sous-algèbres de V. Notons par Δ_k (resp. Δ_k^*) la fonction polynôme sur V définie par $\Delta_k(x) = \det^{(k)}(x^{(k)})$ où $x^{(k)}$ est la projection orthogonale de x sur $V^{(k)}$ et $\det^{(k)}$ est la fonction déterminant de l'algèbre $V^{(k)}$ (resp. $\Delta_k^*(x) = \det_{(k)}(x_{(k)})$ où $x_{(k)}$ est la projection orthogonale de x sur $V_{(k)}$ et $\det_{(k)}$ est la fonction déterminant de l'algèbre $V_{(k)}$).
L'espace $\mathcal{P}(V)$ admet alors la décomposition en G-modules irréductibles (cf. [Fa.-Ko.]):

$$\mathcal{P}(V) = \bigoplus_{\mathbf{m}=(\mathbf{m_1},\ldots,\mathbf{m_r})} \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$$

avec $\mathcal{P}_{\mathbf{m}} = \{\Delta_{\mathbf{m}}(gx)/g \in G\}$ (où $\Delta_{\mathbf{m}}(x) = \Delta_1(x)^{m_1-m_2}\Delta_2(x)^{m_2-m_3}...\Delta_r(x)^{m_r}$, $\mathbf{m} = (m_1, .., m_r)$ avec $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_r \geq 0$ les m_i étant des entiers).
On notera $\pi_{\mathbf{m}}$ l'action naturelle de G dans l'espace $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$. Un vecteur de plus haut poids pour le G module $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ est le polynôme

$$\Delta_{\mathbf{m}}^* = \Delta_1^*(x)^{m_1-m_2}\Delta_2^*(x)^{m_2-m_3}...\Delta_r^*(x)^{m_r}$$

de poids dominant:

$$\lambda_{\mathbf{m}}(\mathrm{P}(\exp a)) = a_1^{-2m_r}....a_r^{-2m_1}$$

$(a = \sum a_i e_i)$, et le plus bas poids $\mu_{\mathbf{m}}$ par $\mu_{\mathbf{m}}(\mathrm{P}(\exp a)) = a_1^{-2m_1}....a_r^{-2m_r}$, $\Delta_{\mathbf{m}}$ étant un vecteur de plus bas poids.
Remarquons que, considéré comme G^1 module, $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ reste irréductible et s'identifie à la représentation $\mathcal{P}_{\mathbf{m^1}}$ avec $\mathbf{m^1} = (m_1 - m_r, m_2 - m_r, .., m_{r-1} - m_r, 0)$ et que la décomposition $G = \mathbb{R}^{+*} \times G^1$ nous donne $\pi_{\mathbf{m}} = \chi^{-\frac{|\mathbf{m}|}{n}} \otimes \pi^1_{\mathbf{m^1}}$, avec $\chi(g) = \mathrm{Det} g$. D'autre part, nous avons la

Proposition II.1. *La contragrédiente du G^1 module $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ s'identifie au module $\mathcal{P}_{\mathbf{m^c}}$ où $\mathbf{m^c} = (m_1 - m_r, m_1 - m_{r-1}, .., m_1 - m_2, 0)$.*

En effet, il n'est pas difficile de voir que la contragrédiente du G-module $(\mathcal{P}_{\mathbf{m}}, \pi_{\mathbf{m}})$ s'identifie à $(\mathcal{P}_{\mathbf{m}}, \tau)$ avec $\tau(g) = \pi_{\mathbf{m}}(g^{*-1})$. D'autre part, l'application $g \to g^*$ échange les groupes N et $\bar{N}$ et par conséquent un vecteur de plus haut poids pour $(\mathcal{P}_{\mathbf{m}}, \tau)$ est $\Delta_{\mathbf{m}}$; la proposition II.1 s'en déduit aisément. Notons qu'en utilisant la formule (cf. [Fa.-Ko.], proposition VII.1.5) $\Delta_{\mathbf{m}}(x^{-1}) =$

$\Delta^*_{-\mathbf{m}^*}(x)$ (avec $-\mathbf{m}^* = (-m_r, \ldots, -m_1)$), on peut voir que l'application de $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}^c}$:

$$P(x) \mapsto (\det x)^{m_1} P(x^{-1})$$

réalise un isomorphisme de G^1 module entre la contragrédiente de $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ et $\mathcal{P}_{\mathbf{m}^c}$.

Soit maintenant π, une représentation irréductible de dimension finie de G, elle s'écrit sous la forme $\chi^\alpha \otimes \pi^1$ où π^1 est une représentation irréductible du groupe G^1.

Proposition II.2. *La représentation π^1 est la restriction d'une représentation holomorphe du groupe $G^1_{\mathbb{C}}$.*

On utilise la classification. Le cas 5) est démontré dans [Kol.-Va.1]; le cas 6) résulte du fait qu'alors $G^1_{\mathbb{C}}$ est simplement connexe. Dans le cas 2), la représentation π^1 de $\mathrm{PSL}(r, \mathbb{R}) = SL(r, \mathbb{R})/\{Id, (-1)^{r+1}Id\}$ peut être considérée comme une représentation de $SL(r, \mathbb{R})$ telle que $\pi^1((-1)^{r+1}g) = \pi^1(g)$; sa dérivée $d\pi^1$ s'étend par linéarité sur ${\mathfrak{G}^1}_{\mathbb{C}}$, cette extension s'intègre (par simple connexité) en une représentation holomorphe de $\mathrm{SL}(r, \mathbb{C})$ possédant la même parité que π^1, elle redescend donc en une représentation de $G^1_{\mathbb{C}} = SL(r, \mathbb{C})/\{Id, (-1)^{r+1}Id\}$; démonstration analogue pour les cas 3) et 4).

Considérons $\tilde{\pi}$ une représentation holomorphe de $G_{\mathbb{C}}$, elle est caractérisée par son poids dominant $\lambda_{\tilde{\pi}}$. Ecrivons $\lambda_{\tilde{\pi}}(\mathrm{P}(\sum a_i e_i)) = \prod_1^r a_i^{m_i}$. Par analycité de $\lambda_{\tilde{\pi}}$ les nombres m_i sont des entiers relatifs, et en écrivant les conditions pour que $\lambda_{\tilde{\pi}}$ soit dominant, on trouve: $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_r$.

Proposition II.3. *Soit π une représentation irréductible de dimension finie de G, sphérique (i.e. elle possède un vecteur non nul K invariant). Alors elle peut s'écrire*

$$\pi = \chi^\beta \otimes \pi_{\mathbf{m}}.$$

Comme $\pi = \chi^\alpha \otimes \pi^1$ est sphérique, la représentation π^1 l'est aussi; par la proposition II.2 on peut se ramener au cas où π^1 est la restriction d'une représentation $\tilde{\pi}^1$ holomorphe de $G_{\mathbb{C}}$, $\tilde{\pi}^1$ est donc sphérique. En utilisant le théorème de Cartan-Helgason on trouve que la restriction de $\lambda_{\tilde{\pi}^1}$ à $\mathfrak{h}^-$ est nulle et que $\frac{(\lambda_{\tilde{\pi}^1}, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}_+$. Cette dernière condition nous fournit $\frac{m_j - m_i}{2} \in \mathbb{Z}_+$ pour $j > i$, c'est à dire que les $m_j - m_i$ sont pairs, ce qui achève la démonstration (voir aussi [Hi.-Ne.] pour ce type de résultat).

D. Les distributions zêta généralisées.

On note par $\Phi_j^{\mathbf{m}}(., s)$ les distributions tempérées définies par prolongement méromorphe des intégrales (qui sont convergentes pour $\Re s \geq 0$):

$$\int_{\Omega_j} |\mathrm{det} x|^s \Delta_{\mathbf{m}}(x) f(x) dx.$$

Pour $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, on retrouve les distributions zêta classiques, notées $\Phi_j(.,s)$ dans [Bl.1] et on a:

$$\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s) = \Delta_{\mathbf{m}} \Phi_j(.,s)$$

Les pôles possibles de ces distributions sont ceux de la fonction

$$\Gamma_\Omega(s + n/r + \mathbf{m}) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^{r} \Gamma(s + m_j + 1 + \frac{(r-j)d}{2})$$

(voir [Fa.-Ko.] pour les propriétés de la fonction gamma du cône Ω), et si s_0 est pôle d'ordre $o_{\mathbf{m}}(s_0)$ de cette fonction, il est facile de voir que sa multiplicité pour $\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s)$, ne dépasse pas $o_{\mathbf{m}}(s_0)$ cela résulte de l'identité de Bernstein (voir [Fa.-Ko.], page 129):

$$(\det(\partial))^k |\mathrm{det} x|^{s+k} \Delta_{\mathbf{m}}(x) = (-1)^j |\mathrm{det} x|^s \Delta_{\mathbf{m}}(x) \frac{\Gamma_\Omega(s + k + \mathbf{m} + \frac{n}{r})}{\Gamma_\Omega(s + \mathbf{m} + \frac{n}{r})}, \quad x \in \Omega_j$$

où, si P est un polynôme sur V, $P(\partial)$ est l'opérateur différentiel à coefficients constants tel que: $P(\partial)\exp(< ., y >) = P(y)\exp(< ., y >)$.

Rapelons brièvement, pour la commodité du lecteur, la définition du changement de variable Φ, défini dans [Bl.1]: on fixe un système complet d'idempotents orthogonaux de V, $\{e_1, \ldots, e_r\}$; dans la décomposition de Peirce associée $V = \bigoplus_{1 \le i \le j \le r} V_{ij}$, l'algèbre:

$$V' = \{x \in V / e_1 x = 0\} = \bigoplus_{2 \le i \le j \le r} V_{ij}$$

est une sous-algèbre de V simple, euclidienne et de rang $r-1$; posons enfin: $W = \{x \in V / e_1 x = \frac{1}{2} x\} = \bigoplus_{2 \le j \le r} V_{1j}$; l'application Φ est alors définie par:

$$\begin{aligned} \Phi : &\mathbb{R} \times W \times V' \longrightarrow V \\ &(u, z, v) \longmapsto \exp(2z \square e_1)(ue_1 + v). \end{aligned}$$

cette application réalise un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^* \times W \times V'$ sur l'ouvert $U = \{x \in V / x_{11} \neq 0\}$ (cf. la proposition 3.1 de [Bl.1]; pour un élément x de V, x_{ij} désigne la composante sur V_{ij} de cet élément suivant la décomposition de Peirce).

Notons $\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s)_{|U}$ la restriction à U de la distribution $\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s)$, et effectuons le changement de variable Φ dans l'ouvert U, on montre alors (même démonstration que celle du corollaire 3.2 de [Bl.1]) que l'image réciproque par Φ de $\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s)_{|U}$ notée $\Phi^*[\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s)_{|U}]$ vérifie la proposition:

Proposition II.4. *On a, pour* $(0 < j < r)$*:*

$$\Phi^*[\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s)_{|U}] = x_-^{s+d(r-1)+m_1} \otimes dz \otimes \Phi_{j-1}^{\mathbf{m}'}(.,s) + x_+^{s+d(r-1)+m_1} \otimes dz \otimes \Phi_j^{\mathbf{m}'}(.,s)$$

et

$$\Phi^*[\Phi_0^{\mathbf{m}}(.,s)_{|U}] = x_+^{s+d(r-1)+m_1} \otimes dz \otimes \Phi_0^{\mathbf{m}'}(.,s)$$

$$\Phi^*[\Phi_r^{\mathbf{m}}(.,s)_{|U}] = x_-^{s+d(r-1)+m_1} \otimes dz \otimes \Phi_r^{\mathbf{m}'}(.,s)$$

avec $\mathbf{m}' = (m_2, \ldots, m_r)$*, et où les distributions* $\Phi_j^{\mathbf{m}'}$ *sont définies sur l'algèbre* V' *comme les* $\Phi_j^{\mathbf{m}}$ *le sont sur* V*.*

Dans cette proposition, nous avons utilisé les notations classiques x_+^s (resp. x_-^s) pour désigner les distributions définies par

$$x_+^s(\phi) = \int_0^\infty x^s \phi(x)dx \quad \text{(resp. } x_-^s(\phi) = \int_{-\infty}^0 |x|^s \phi(x)dx)$$

Cette proposition nous permettra, dans le paragraphe IV, de déterminer, par une récurrence sur le rang r, les pôles effectifs des distributions $\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s)$.

Définissons la transformée de Fourier d'un élément f de l'espace de Schwartz de V par: $\hat{f}(y) = \int_V e^{-i<x,y>} f(x)dx$; à partir de l'équation fonctionnelle ([Sa.-Sh.], voir aussi [Sa.-Fa.]) des distributions $\Phi_j(.,s)$, on obtient celle des $\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s)$ (je remercie J. Faraut de m'avoir signalé ce résultat):

Proposition II.5. *La transformée de Fourier de la distribution* $\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s)$ *est donnée par :*

$$\Phi_j^{\mathbf{m}}(\hat{f}, s-n/r) = \Gamma_\Omega(s+n/r+\mathbf{m}) \exp(-(rs+|\mathbf{m}|)i\pi/2) \sum_{k=0}^{r} u_{jk}(s) \Psi_k^{-\mathbf{m}^*}(f,-s)$$

où les fonctions $u_{jk}(s)$ *sont des polynômes en* $\exp(i\pi s)$*,* $-\mathbf{m}^* = (-m_r, \ldots, -m_1)$ *et avec*

$$\Psi_k^{\mathbf{m}}(f,s) = \int_{\Omega_j} |\mathrm{det} x|^s \Delta_{\mathbf{m}}^*(x) f(x)dx.$$

Dans $\Phi_j(\hat{f}\Delta_{\mathbf{m}}, s-n/r)$, on commence par remplacer $\hat{f}\Delta_{\mathbf{m}}$ par $(-i)^{|\mathbf{m}|}(\Delta_{\mathbf{m}}(\partial)f)\hat{}$; l'équation fonctionnelle des distributions $\Phi_j(.,s)$ telle qu'énoncée dans [Bl.1] (théorème 2.1) conduit à la relation:

$$\Phi_j((\Delta_{\mathbf{m}}(\partial)f)\hat{}, s-n/r) = \Gamma_\Omega(s) \exp(-\frac{i\pi rs}{2}) \sum_{k=0}^{r} u_{jk}(s) \Phi_k(\Delta_{\mathbf{m}}(\partial)f, -s).$$

Une intégration par parties et l'identité de Bernstein:

$$\Delta_{\mathbf{m}}(\partial)|\det x|^s = (-1)^{|\mathbf{m}|}\frac{\Gamma_\Omega(-s+\mathbf{m})}{\Gamma_\Omega(-s)}\Delta_{\mathbf{m}}(x^{-1})|\det x|^s$$

nous donne:

$$\Phi_k(\Delta_{\mathbf{m}}(\partial)f,-s) = \frac{\Gamma_\Omega(s+\mathbf{m})}{\Gamma_\Omega(s)}\Phi_k(\Delta_{\mathbf{m}}(x^{-1})f(x),-s).$$

La proposition résulte alors de la formule $\Delta_{\mathbf{m}}(x^{-1}) = \Delta^*_{-\mathbf{m}^*}(x)$ déja évoquée plus haut.

Remarque II.6 On voit que dans cette équation fonctionnelle généralisée, les coefficients $u_{jk}(s)$ sont ceux de l'équation fonctionnelle des distributions $\Phi_j(.,s)$, ce fait est essentiel pour les démonstrations des résultats du paragraphe IV.

Définition II.7. *Soit (π, L_π) une représentation irréductible de dimension finie du groupe G. Une distribution vectorielle T sur V à valeurs dans L_π est dite G-homogène de degré s si pour toute fonction test ϕ,*

$$< T,\phi_g >= (\mathrm{Det} g)^{\frac{rs}{n}+1}\pi(g) < T,\phi >$$

où g est dans G et avec $\phi_g(x) = \phi(g^{-1}x)$. On notera $\mathcal{H}^s_\pi$ l'espace de ces distributions. La distribution T est dite G^1 invariante si

$$< T,\phi_g >= \pi(g) < T,\phi >$$

où g est dans G^1. On notera $\mathcal{I}_\pi$ l'espace de ces distributions.

Dans le cas où la représentation π est triviale, on retrouve la notion habituelle de distribution homogène, on sait alors (voir par exemple [Bl.1]) déterminer complètement l'espace $\mathcal{H}^s_\pi$ cela se fait grâce à la considération des distributions $\Phi_j(.,s)$. Dans ce travail, nous verrons le rôle crucial joué par les $\Phi^{\mathbf{m}}_j(.,s)$ pour la détermination de $\mathcal{H}^s_\pi$ dans le cas général.

Dans le paragraphe V. nous aurons besoin de la notion de distribution quasi-homogène, introduite dans [Ri.-St.]:

Définition II.8. *Une distribution vectorielle K sur V à valeurs dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ est G quasi-homogène de degré s s'il existe des distributions $U_1,\ldots,U_l$ telles que pour tout g dans G:*

$$g.K = (\mathrm{Det} g)^{\frac{rs}{n}+1}\pi_{\mathbf{m}}(g)K + (\mathrm{Det} g)^{\frac{rs}{n}+1}\sum_{i=1}^{l}(\mathrm{LogDet} g)^i\pi_{\mathbf{m}}(g)U_i.$$

III. Caractérisation des représentations.

On se propose de caractériser dans ce paragraphe les représentations π pour lesquelles l'espace $\mathcal{H}_\pi^s$ n'est pas trivial. On va retrouver des résultats analogues à ceux de [Kol.-Va.1].

Lemme III.1. *Si l'espace $\mathcal{H}_\pi^s$ contient une distribution non nulle de support $\{0\}$, la représentation π est sphérique.*

Soit T une telle distribution. Dans une certaine base e_α de l'espace de la représentation π, on a: $T = \sum P_\alpha(\partial)\delta e_\alpha$ où les P_α sont des polynomes. La représentation π s'écrit $\pi = \chi^\beta \otimes \pi^1$ où π^1 est une représentation G^1. En écrivant la condition d'homogénéité avec $g = \lambda Id$, on montre facilement que tous les polynomes P_α sont homogènes de même degré (on peut vérifier que ce degré vaut $-n(\frac{rs}{n} + 1 + \beta)$). Ecrivons ensuite la condition d'homogénéité pour la distribution T avec g dans G^1, en notant $\lambda_{\alpha\beta}(g)$ les coefficients matriciels de $\pi^1(g)$ dans la base (e_α), il vient:

$$\sum (P_\alpha(\partial)\delta)(g.\phi)e_\alpha = \sum_{\alpha,\beta} \lambda_{\alpha\beta}(g)(P_\beta(\partial)\delta)(\phi)e_\alpha.$$

On en tire

$$g.P_\alpha(\partial) = (\sum_\beta \lambda_{\alpha\beta}(g^{-1})P_\beta)(\partial)$$

où $(g.P_\alpha(\partial))(\phi) = g.(P_\alpha(\partial)(g^{-1}\phi))$. Mais $g.P_\alpha(\partial) = (g^{*-1}P_\alpha)(\partial)$ où $g.P$ est l'action naturelle de G sur les polynomes (voir [Fa.-Ko.] page 222), tout ceci implique

$$g^{*-1}P_\alpha = \sum_\beta \lambda_{\alpha\beta}(g^{-1})P_\beta)$$

c'est à dire que sous l'action du groupe G^1, les polynomes P_α engendrent la représentation π^1; il en résulte que cette dernière est isomorphe à une représentation $\pi^1_{\mathbf{m}}$.

Dans la suite de l'article nous dirons que le support d'une distribution est de rang p s'il contient au moins un élément de rang p mais aucun élément de rang strictement supérieur à p.

Lemme III.2. *Supposons que l'espace $\mathcal{H}_\pi^s$ contienne une distribution non nulle à support de rang p avec $1 \leq p \leq r-1$, alors la représentation π est sphérique.*

La démonstration consiste à adapter la preuve du lemme 5 de [Ri.-St.]. Soit T une distribution donnée par le lemme. Dans un voisinage convenable W du point $o_{p,q}$, la distribution T s'écrit par le théorème de Schwartz comme somme finie:

$$T = \sum D_j \Phi_j$$

où les Φ_j sont des distributions sur S_{pq} et les D_j sont des dérivées partielles par rapport à des coordonnées transverses à S_{pq} en $o_{p,q}$.

On montre dans un premier temps que les distributions Φ_j sont à densité C^∞ sur $S_{pq} \cap W$. En effet, soit η une fonction C^∞ sur G, à support compact convenable et telle que

$$B = \int_G (\mathrm{Det} g)^{\frac{rs}{n}+1} \eta(g)\pi(g) dg$$

soit inversible. Utilisant l'homogénéité de T, il vient facilement:

$$T(\phi) = B^{-1} \int_G \eta(g) T(g.\phi) dg$$

Pour toute fonction ϕ à support convenable. On conclut alors comme dans [Ri.-St.].

On arrive ainsi à la représentation suivante de T dans W:

$$T = \sum_{m=0}^{M} \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m} Y_{i_1} \ldots Y_{i_m} \psi_I$$

où $I = (i_1, \ldots, i_m)$, les fonctions ψ_I étant C^∞ sur $S_{pq} \cap W$, $Y_{i_1} \ldots Y_{i_m}$ sont des champs de vecteurs sur W que l'on suppose engendrer en tout point de $S_{pq} \cap W$ l'espace normal à l'orbite S_{pq}, et où M est l'ordre de transversalité de la distribution T.

Exprimant l'homogénéité de T comme dans [Ri.-St.], nous pouvons écrire pour $|I| = M$ (cf. la relation (37) de [Ri.-St.]):

$$\pi(g)\psi_I(x) = (\mathrm{Det} g)^{-\frac{rs}{n}-1} J_g(x) \sum_{|L|=M} \gamma_{LI}(g,x)\psi_L(g.x) \tag{1}$$

g étant proche de l'identité, x étant dans $S_{pq} \cap W$, où $J_g(x)$ est le jacobien de l'action de g sur S_{pq} et avec $\gamma_{LI}(g,x) = \beta_{IL}(g^{-1},x)$ les coefficients $\beta_{IL}(g,x)$ étant donnés par l'action de g sur les champs de vecteurs:

$$g\tilde{Y}^I = \sum_{|J|=M} \beta_{JI}(g,x)\tilde{Y}^J + \sum_{|J|<M} \ldots$$

($\tilde{Y}^I$ désigne l'adjoint de Y^I sur V).

Dans la relation (1) faisons $x = o_{p,q}$, et prenons g dans $H_{pq} = \{g \in G/go_{p,q} = o_{p,q}\}$ et proche de l'identité, on obtient:

$$\pi(g)\psi_I(o_{p,q}) = (\mathrm{Det} g)^{-\frac{rs}{n}-1} J_g(o_{p,q}) \sum_{|L|=M} \gamma_{LI}(g, o_{p,q})\psi_L(o_{p,q}). \tag{2}$$

Notons que, par analycité, la relation (2) est valable pour tout g dans la composante neutre $(H_{pq})_o$ du groupe H_{pq}; par ailleurs elle est également valable pour tout g de H_{pq} qui envoie $S_{pq} \cap W$ dans lui-même.

Rappelons que nous avons noté $V_{(r-p)}$ l'espace normal à S_{pq} en $o_{p,q}$, c'est une algèbre de Jordan simple et euclidienne de rang $r-p$. Dans la suite, si O est un objet relatif à l'algèbre V, nous noterons par $O_{(r-p)}$ l'objet correspondant pour l'algèbre $V_{(r-p)}$; en particulier, $\mathcal{P}^k_{(r-p)}$ désigne l'espace des polynômes homogènes de degré k sur $V_{(r-p)}$.

Dans une base convenable $\{e_I, |I| = M\}$ de l'espace $\mathcal{P}^M_{(r-p)}$, l'application linéaire de matrice $\gamma_{IJ}(g, o_{p,q})$, que nous notons par $\tilde{\sigma}(g)$, n'est autre que la projection sur l'espace $\mathcal{P}^M_{(r-p)}$ de l'action naturelle de g sur $\mathcal{P}^M$. En particulier, si l'on note par $H^{'}_{pq}$ le sous-groupe de H_{pq} formé des éléments de H_{pq} laissant stable l'espace N_{pq}, et si l'on prend g dans $H^{'}_{pq}$, on a $\tilde{\sigma}(g) = \sigma(g_{(r-p)})$ où $g_{(r-p)}$ est la restriction de g à l'espace $N_{pq} = V_{(r-p)}$ et où $\sigma(g_{(r-p)})$ désigne l'action naturelle de $g_{(r-p)}$ sur $\mathcal{P}^M_{(r-p)}$.

Considérons l'application linéaire L de $\mathcal{P}^M_{(r-p)}$ dans l'espace de la représentation π telle que $L(e_I) = \psi_I(o_{p,q})$ par la relation (2) il vient immédiatement la relation (3) pour g dans $(H^{'}_{pq})_o$:

$$L\sigma(g_{(r-p)}) = (\mathrm{Det} g)^{\frac{rs}{n}+1} J_g(o_{p,q})^{-1}\pi(g)L. \tag{3}$$

Là encore, la relation (3) est encore valable pour tout g de $H^{'}_{pq}$ qui envoie $S_{pq} \cap W$ dans lui-même. Sous l'action de $G_{(r-p)}$, $\mathcal{P}^M_{(r-p)}$ se décompose en modules irréductibles:

$$\mathcal{P}^M_{(r-p)} = \bigoplus_{\substack{\mathbf{n}=(\mathbf{n_{p+1}},\dots,\mathbf{n_r}) \\ |\mathbf{n}|=\mathbf{M}}} (\mathcal{P}_{(r-p)})_{\mathbf{n}}.$$

Observons que la restriction de L à un espace $(\mathcal{P}_{(r-p)})_{\mathbf{n}}$ est soit nulle, soit injective; en effet supposons que l'on ait $L(v) = 0$ pour un élément v non nul de cet espace, alors par la relation (3) il vient $L(\mathrm{P}_{(r-p)}(x)v) = 0$ pour tous les x dans $\Omega_{(r-p)}$ et donc, puisque l'application $x \to L(\mathrm{P}_{(r-p)}(x)v)$ est polynomiale, pour tous les x dans $V^{\mathbb{C}}_{(r-p)}$; mais les éléments $\mathrm{P}_{(r-p)}(x)$ pour x dans $V^{\mathbb{C}}_{(r-p)}$ engendrent le groupe de structure de l'algèbre $V^{\mathbb{C}}_{(r-p)}$ et par conséquent L est nulle sur l'espace $(\mathcal{P}_{(r-p)})_{\mathbf{n}}$ tout entier.

Supposons donc que L soit injective sur l'espace $(\mathcal{P}_{(r-p)})_{\mathbf{n}}$; la considération du vecteur $L(v_{\mathbf{n}}) = f$ où $v_{\mathbf{n}}$ est un vecteur de plus haut poids de $(\mathcal{P}_{(r-p)})_{\mathbf{n}}$ va nous permettre de montrer que le poids dominant λ de la représentation π est trivial sur $\exp(\mathfrak{h}^-)$.En effet suivant les rappels du paragraphe I, on peut voir la représentation π comme agissant dans un espace F_λ de fonctions analytiques sur N'. Un élément m de $\exp(\mathfrak{h}^-)$ appartient à $(H'_{pq})_o$ et le vecteur de plus haut poids $v_{\mathbf{n}}$ est invariant sous $\sigma(m_{r-p})$ puisque $m_{(r-p)}$ appartient à $M_{(r-p)}$. Par la relation (3) on aura par conséquent:

$$\lambda(zm)f(z_m) = f(z).$$

Prenons $z = e$, et remarquons que la N'-composante de m est e; si $f(e)$ est différent de 0, on trouve la relation

$$\lambda(m) = 1$$

ce qui est bien l'égalité souhaitée.

Nous sommes ramené à montrer que $f(e)$ est non nul. Procédant comme plus haut, on montre que f est $N_{\mathfrak{m}}$ invariant et donc déterminée par ses valeurs sur $N_{\mathbb{C}}$ et, par analycité, par ses valeurs sur N.

D'après les rappels sur la décomposition de Gauss, f peut s'écrire, pour z dans N:

$$f(z) = f(\tau(z^{(2)}) \ldots \tau(z^{(r)})).$$

Pour $j > p$, l'élément $\tau(z^{(j)})$ est dans $(H_{pq})_o$ (c'est une simple vérification utilisant le lemme VI.3.1 de [Fa.-Ko.]), et $\tilde{\sigma}(\tau(z^{(j)}))v_{\mathbf{n}} = v_{\mathbf{n}}$ puisque l'on peut voir $v_{\mathbf{n}}$ comme un vecteur de plus haut poids pour la représentation $\pi_{(n_{p+1},\ldots,n_r,0,\ldots,0)}$; il en résulte la relation:

$$f(z) = f(\tau(z^{(2)}) \ldots \tau(z^{(p)})).$$

Plaçons nous alors dans l'algèbre $V^{(p)} = \bigoplus_{0<i\leq j\leq p} V_{ij}$ (si O est un objet relatif à l'algèbre V, nous notons $O^{(p)}$ l'objet correspondant pour l'algèbre $V^{(p)}$), et considérons dans cette algèbre l'élément $\tau(z^{(2)}) \ldots \tau(z^{(p)})o_{p,q}$. Génériquement (i.e en dehors de $\prod_1^p \Delta_k = 0$) cet élément est inversible par rapport aux $\sum_{k=1}^i e_k$ $(1 \leq i \leq p)$ et sera donc, par les rappels du paragraphe II, de la forme $\bar{n}ao_{p,q}$ avec $\bar{n}$ dans $\bar{N}^{(p)}$ et a dans $A^{(p)}$, on peut voir ces deux éléments dans $\bar{N}$ et A; finalement on peut écrire $\tau(z^{(2)}) \ldots \tau(z^{(p)}) = \bar{n}ak$ avec k agissant trivialement sur $V_{(r-p)}$ et donc $\sigma(k_{(r-p)})v_{\mathbf{n}} = v_{\mathbf{n}}$. La relation (3) entraine alors que dans un ouvert de $N^{(p)}$:

$$f(z) = \lambda(zk^{-1})f(e)$$

car $zk^{-1} \in \bar{N}'.D$ et donc sa N'-composante est réduite à e. Il résulte de tout ceci que si f est non nulle sa valeur en e l'est aussi. Noter que cette démonstration donne l'unicité de f à un scalaire multiplicatif près

Ecrivons maintenant $\lambda(\mathrm{P}(\sum a_k e_k)) = \prod_{k=1}^r a_k^{m_k}$, où les m_k sont des entiers relatifs tels que $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_r$, il s'agit de voir que les entiers relatifs m_k sont de même parité. Pour cela, soit $g_i = \mathrm{P}(-e_1 + \ldots - e_i + \ldots + e_r)$, c'est un élément du groupe $H_{pq}^{'}$ qui envoie $S_{pq} \cap W$ dans lui-même; d'autre part $(g_i)_{(r-p)} = \mathrm{P}_{(r-p)}(e_{p+1} + \ldots - e_i + \ldots + e_r)$ (ou Id si $p > i$). Par la relation (3) il vient:

$$\sigma(\mathrm{P_{(r-p)}}(\mathrm{e_{p+1}} + \ldots - \mathrm{e_i} + \ldots + \mathrm{e_r}))\mathrm{v_{\mathbf{n}}} = \mathrm{v_{\mathbf{n}}}$$

puisque $v_{\mathbf{n}}$ est un vecteur de plus haut poids de $(\mathcal{P}_{(r-p)})_{\mathbf{n}}$. Par conséquent:

$$f = \pi(g_i)f.$$

En regardant en e, on arrive à:

$$\lambda(\mathrm{P}_{(r-p)}(e_{p+1} + \ldots - e_i + \ldots + e_r)) = 1.$$

Ce qui entraine que m_1 et m_i ont même parité et achève la démonstration du lemme.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le résultat essentiel de ce paragraphe.

Théorème III.3. *L'espace $\mathcal{H}_\pi^s$ est non nul si et seulement si la représentation π est sphérique.*

Soit T un élément non nul de $\mathcal{H}_\pi^s$, par les lemmes III.1 et III.2, nous pouvons supposer que la restriction T_i de la distribution T à l'une des orbites ouvertes Ω_i est non nulle. Par un résultat classique (voir par exemple [Ra.-Sc.], lemme 5.12), la représentation $\chi^{\frac{rs}{n}+1+\alpha} \bigotimes \pi^1$ possède alors un vecteur K_i-invariant non nul, où l'on a posé $K_i = \{g \in G/go_{r-i,i} = o_{r-i,i}\}$. Le lemme 5.12 de [Ra.-Sc.] montre aussi que le vecteur K_i invariant détermine d'une manière unique la distribution T_i. Comme le groupe K_i est inclus dans G^1, il en résulte que la représentation π^1 possède un vecteur a_i non nul et K_i-invariant. On sait par la proposition II.2 que π^1 s'étend en une représentation holomorphe du groupe $G_{\mathbb{C}}^1$ encore notée π^1. Cette représentation possède donc un vecteur $(K_i)_{\mathbb{C}}$-invariant, où l'on a noté par $(K_i)_{\mathbb{C}}$ le sous groupe de $G_{\mathbb{C}}^1$ correspondant à l'algèbre de Lie $(\mathfrak{k}_i)_{\mathbb{C}}$, complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_i$ de K_i. Il suffit alors de remarquer que $K_{\mathbb{C}}$ et $(K_i)_{\mathbb{C}}$ sont conjugués dans $G_{\mathbb{C}}^1$ pour pouvoir conclure que la représentation π^1 possède un vecteur K-invariant non nul. Notons qu'ici aussi nous avons l'unicité de T_i à un scalaire multiplicatif près, puisque il en est de même du vecteur K-invariant.

Remarque III.4: Il n'est pas difficile d'adapter les démonstrations effectuées pour les distributions G^1 invariantes, nous obtenons ainsi la généralisation du résultat de [Kol.-Va.1]:

Théorème III.5. *L'espace $\mathcal{I}_\pi$ est non nul si et seulement si la représentation π est sphérique.*

IV. Construction de distributions homogènes.

Notons par $\mathcal{H}^s_{\mathbf{m}}$ l'espace des distributions G-homogènes de degré s à valeurs dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$. Le but de ce paragraphe est de construire des éléments de $\mathcal{H}^s_{\mathbf{m}}$. La stratégie est analogue à celle utilisée dans [Ri.-St]. On commence par une étude préliminaire.

A. Une étude scalaire préliminaire.

On considère une distribution de la forme:

$$A^{\mathbf{m}}(.,s) = \sum_{j=0}^{r} c_j \Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s).$$

Pour un pôle effectif s_0 d'ordre α de la distribution $A^{\mathbf{m}}(.,s)$, notons

$$A^{\mathbf{m}}(.,s) = \sum_{h=1}^{h=\alpha} \frac{A_h^{\mathbf{m}}(.,s_0)}{(s-s_0)^h} + A_0^{\mathbf{m}}(.,s_0) + \dots$$

son développement de Laurent au voisinage de ce pôle. Nous voulons connaitre les pôles effectifs de la distribution $A^{\mathbf{m}}(.,s)$ et avoir des précisions sur le support des distributions $A_h^{\mathbf{m}}(.,s_0)$ (en considérant la restriction de $A^{\mathbf{m}}(.,s)$ à un ouvert Ω_j, on voit que le support de la distribution $A_0^{\mathbf{m}}(.,s_0)$ est de rang r).

Supposons d'abord l'entier d pair et construisons le polynôme P satisfaisant aux deux conditions suivantes (où $d^\circ P$ désigne le degré de P):

$$\begin{cases} P(j) = c_j \exp(i\pi s_0 j) \\ \quad \mathrm{d}^\circ P \leq r \end{cases}$$

Rappelons d'autre part que pour un pôle s_0 de la fonction $\Gamma_\Omega(s + n/r + \mathbf{m})$, nous avons noté $o_{\mathbf{m}}(s_0)$ sa multiplicité.

Théorème IV.1. *La distribution $A^{\mathbf{m}}(.,s)$ possède en s_0 un pôle d'ordre*

$$\min(\mathrm{d}^\circ P, o_{\mathbf{m}}(s_0)).$$

La démonstration étant identique à celle du théorème 3.3 de [Bl.1], nous ne donnons pas les détails pour lesquels nous renvoyons à l'article cité. On se place d'abord dans le cas où l'on a $o_{\mathbf{m}}(s_0) = r$ c'est à dire que $s_0 \leq -m_1 - n/r$, et l'on démontre le résultat pour une base particulière $\{P_0, \dots, P_r\}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à r; dans cette étape, le seul changement par rapport à la démonstration du théorème 3.3 de [Bl.1] est l'utilisation de l'équation fonctionnelle généralisée (c'est-à dire la proposition II.5) pour les distributions $\Phi_j^{\mathbf{m}}(.,s)$ au lieu de l'équation fonctionnelle classique; c'est ici que la remarque II.6 est cruciale, puisque la démonstration du théorème 3.3 de

[Bl.1] est essentiellement basée sur des manipulations de certains des coefficients $u_{jk}(s)$ intervenant dans l'équation fonctionnelle classique.
Si maintenant l'on a

$$-n/r - m_1 < s_0 \leq -m_r$$

on considère comme dans [Bl.1], la restriction de la distribution $A^{\mathbf{m}}(.,s)$ à l'ouvert $U = \{x \in V/ \quad x_{11} \neq 0\}$ et l'on montre (par une récurrence sur r), comme dans le cas scalaire (en utilisant notre proposition II.4 au lieu du corollaire 3.2 de [Bl.1]) que cette restriction présente en s_0 un pôle d'ordre $\min(\mathrm{d}^\circ P, o_{\mathbf{m}}(s_0))$; la distribution $A^{\mathbf{m}}(.,s)$ possède donc en s_0 un pôle d'ordre au moins égal à $\min(\mathrm{d}^\circ P, o_{\mathbf{m}}(s_0))$ mais par ailleurs la multiplicité ne peut pas dépasser ce nombre puisqu'elle est majorée par $o_{\mathbf{m}}(s_0)$ et que $A^{\mathbf{m}}(.,s) = \Delta_{\mathbf{m}}(x)A^{\mathbf{0}}(.,s)$, cela achève la démonstration.

Supposons l'entier d impair et construisons les deux polynômes P_o et P_1 tels que :

$$\begin{cases} c_j \exp(i\pi j s_o) = P_o(j) & \text{si j est pair} \\ \mathrm{d}^\circ P_o \leq [\frac{r}{2}] & \\ c_j \exp(i\pi j s_o) = P_1(j) & \text{si j est impair} \\ \mathrm{d}^\circ P_1 \leq [\frac{r-1}{2}] & \end{cases}$$

Posons par ailleurs $\varepsilon = \varepsilon(P_0, P_1) = 1$ si $\mathrm{d}^\circ(P_o - P_1) = \sup(\mathrm{d}^\circ P_o, \mathrm{d}^\circ P_1)$, et $\varepsilon = 0$ sinon.

Théorème IV.1'. *1) Si s_0 est un demi-entier, la distibution $A^{\mathbf{m}}(.,s)$ y possède un pôle d'ordre*

$$\min(\sup(\mathrm{d}^\circ P_o, \mathrm{d}^\circ P_1), o_{\mathbf{m}}(s_0))$$

2) Si s_0 est un entier, la distibution $A^{\mathbf{m}}(.,s)$ y possède un pôle d'ordre

$$\min(\sup(\mathrm{d}^\circ P_o, \mathrm{d}^\circ P_1) + \varepsilon, o_{\mathbf{m}}(s_0)).$$

La démonstration est identique au cas scalaire (théorème 5.1 de [Bl.1]), en employant la remarque II.6 et la proposition II.4.

En ce qui concerne le support des $A_h^{\mathbf{m}}(.,s_0)$, les résultats suivants se démontrent également en copiant le cas scalaire:

Théorème IV.2. *Supposons l'entier d pair. Pour tout pôle s_0 d'ordre α de $A^{\mathbf{m}}(.,s)$, et tout entier h, compris entre 1 et α, le support de la distribution $A_h^{\mathbf{m}}(.,s_0)$ est de rang $r-h$. Supposons l'entier d impair. Pour tout pôle s_0 d'ordre α de $A^{\mathbf{m}}(.,s)$, et tout entier h compris entre 1 et α, le support de la distribution $A_h^{\mathbf{m}}(.,s_0)$ est de rang $r+1-2h$ si s_0 est un entier, et de rang $r-2h$ si s_0 est un demi-entier.*

B. Construction de distributions homogènes à valeurs dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$.

Avec (e_α) une base de $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$, et (f_α) sa base duale dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m^c}}$ (par la Proposition II.1 on a identifié le G^1 module $\mathcal{P}_{\mathbf{m^c}}$ à la contragrédiente de $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$) nous pouvons définir l'application $h_{\mathbf{m}}$ de V dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ par:

$$h_{\mathbf{m}}(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x) e_\alpha.$$

Par construction, cette application vérifie le lemme suivant:

Lemme IV.3. *L'application $h_{\mathbf{m}}$ est G^1 équivariante, d'une manière précise:*

$$h_{\mathbf{m}}(g.x) = \chi^{\frac{rm_1}{n}}(g)\pi_{\mathbf{m}}(g)h_{\mathbf{m}}(x)$$

pour g dans G.

On considère alors les distributions sur V à valeurs dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ du type:

$$T_j^{\mathbf{m}}(\phi, s) = \int_{\Omega_j} |\mathrm{det} x|^{s-m_1} h_{\mathbf{m}}(x)\phi(x)dx.$$

Les pôles de ces distributions sont parmi ceux des distributions $\Phi_j^{\mathbf{m^c}}(., s-m_1)$, ($\mathbf{m^c} = (m_1 - m_r, m_1 - m_{r-1}, .., m_1 - m_2, 0)$) cela résulte du fait que les polynômes (f_α) sont, pour un choix convenable de la base (e_α), de la forme $\Delta_{\mathbf{m^c}}(gx)$. Appelons un nombre complexe s critique pour $\pi_{\mathbf{m}}$ s'il est un pôle de la fonction

$$\Gamma_\Omega(s + n/r - \mathbf{m}^*) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^{r} \Gamma(s + 1 - m_j + (j-1)d/2).$$

Par les théorèmes IV.1 et IV.1', un nombre complexe s est critique pour $\pi_{\mathbf{m}}$ s'il est un pôle possible pour les distributions $\Phi_j^{\mathbf{m^c}}(., s-m_1)$; on a donc:

Proposition IV.4. *La distribution $T_j^{\mathbf{m}}(., s)$ se prolonge en tout point s non critique en un élément de l'espace $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}^s$.*

Si s_0 est pôle effectif s_0 d'ordre α de $T_j^{\mathbf{m}}(., s)$, on vérifie que les distributions $T_{j\alpha}^{\mathbf{m}}(., s_0)$ sont s_0-homogènes, et que les autres coefficients $T_{jh}^{\mathbf{m}}(., s_0)$ sont quasi-homogènes de degré s_0.

Donnons, pour terminer ce paragraphe, un résultat utile pour la suite; supposons d'abord l'entier d pair.

Proposition IV.5. *Soient $1 \leq p \leq r-1$ et $0 \leq q \leq p$. Pour tout s_0 critique pour $\pi_{\mathbf{m}}$ tel que $r - p \leq o_{-\mathbf{m}^*}(s_0)$, il existe une distribution G-homogène de degré s_0, de support de rang p et contenant l'orbite $S_{p,q}$.*

On considère une distribution du type

$$A^{\mathbf{m}}(., s) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{sj} j^{r-p} T_j^{\mathbf{m}}(., s)$$

telle que par un choix convenable de la base (e_α), une de ses composantes soit $\sum_{j=0}^{r}(-1)^{sj}j^{r-p}\Phi_j^{\mathbf{m}^{\mathbf{c}}}(., s-m_1)$, elle présentera en s_0 un pôle d'ordre $r-p$ d'après le théorème IV.1, et par le théorème IV.2, la distribution $A_{r-p}^{\mathbf{m}}(., s_0)$ est à support de rang p. Pour la composante $\sum_{j=0}^{r}(-1)^{sj}j^{r-p}\Phi_j^{\mathbf{m}^{\mathbf{c}}}(., s-m_1)$ de la distribution $A^{\mathbf{m}}(., s)$, on peut copier la démonstration du corollaire 3.7 de [Bl.1] ce qui nous donne la proposition.

Dans le cas où d est impair, on a

Proposition IV.5'. *Soient $1 \leq p \leq r-1$ et $0 \leq q \leq p$. Supposons p de la forme $r+1-2h$ avec h un entier; alors pour tout s_0 entier et critique pour $\pi_{\mathbf{m}}$ tel que $h \leq o_{-\mathbf{m}^*}(s_0)$, il existe une distribution G-homogène de degré s_0, de support de rang p et contenant l'orbite $S_{p,q}$. Supposons p de la forme $r-2h$ avec h un entier; alors, pour tout demi-entier s_0 tel que $h \leq o_{-\mathbf{m}^*}(s_0)$, il existe une distribution G-homogène de degré s_0, de support de rang p et contenant l'orbite $S_{p,q}$.*

Supposons p de la forme $r+1-2h$ avec h un entier et soit s_0 un entier critique pour $\pi_{\mathbf{m}}$ tel que $h \leq o_{-\mathbf{m}^*}(s_0)$; on considère les distributions

$$A^{\mathbf{m}}(., s) = \sum_{j \equiv 0[2]} \exp(-i\pi s_0) j^{h-1} T_j^{\mathbf{m}}(., s)$$

et

$$B^{\mathbf{m}}(., s) = \sum_{j \equiv 1[2]} \exp(-i\pi s_0) j^{h-1} T_j^{\mathbf{m}}(., s).$$

Par le théorème IV.1', ces distributions présentent en s_0 un pôle d'ordre h puisque $h \leq o_{-\mathbf{m}^*}(s_0)$, et par le théorème IV.2, les distributions $A_h^{\mathbf{m}}(., s_0)$ et $B_h^{\mathbf{m}}(., s_0)$ sont à support de rang $r+1-2h = p$. On montre comme dans la proposition IV.5 que le support de ces distributions contient toutes les orbites de rang p.

Dans le cas où p est de la forme $r-2h$ avec h un entier, on considère les distributions

$$A^{\mathbf{m}}(., s) = \sum_{j \equiv 0[2]} \exp(-i\pi s_0) j^{h} T_j^{\mathbf{m}}(., s)$$

et

$$B^{\mathbf{m}}(., s) = \sum_{j \equiv 1[2]} \exp(-i\pi s_0) j^{h} T_j^{\mathbf{m}}(., s).$$

A nouveau, par le théorème IV.1', ces distributions présentent en s_0 un pôle d'ordre h et par le théorème IV.2, les distributions $A_h^{\mathbf{m}}(., s_0)$ et $B_h^{\mathbf{m}}(., s_0)$ sont à support de rang $r-2h = p$, les mêmes arguments s'appliquent, mais cette fois çi on trouve que le support de $A_h^{\mathbf{m}}(., s_0)$ contient toutes les orbites $S_{p,q}$ avec q pair, et que celui de $B_h^{\mathbf{m}}(., s_0)$ contient toutes les orbites $S_{p,q}$ avec q impair.

V. L'espace $\mathcal{H}^s_{\mathbf{m}}$ et les distributions invariantes à support singulier.

Le but de ce paragraphe est de montrer que la dimension de l'espace $\mathcal{H}^s_{\mathbf{m}}$ est $r+1$.

Lemme V.1. *Soit T une distribution non nulle, G quasi-homogène de degré s, à valeurs dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ et de support de rang $0 < p < r$. Le nombre s est alors nécessairement critique pour la représentation $\pi_{\mathbf{m}}$, avec*

$$s \leq -(n/r - dp/2) + m_{r-p}.$$

De plus, si S_{pq} est une orbite de rang p, la restriction de T à W_{pq} est homogène et unique à une constante multiplicative près.

La démonstration consiste à reprendre celle du lemme III.2 et à suivre la démarche de Ricci et Stein. Supposons d'abord que T soit homogène. On vérifie facilement que les éléments de A de la forme $a = \mathrm{P}(o_{p,0} + \sum_{i=p+1}^{r} a_i e_i)$ (a_i positifs non nuls) appartiennent à $(H'_{pq})_o$, et que donc la relation (3) du lemme III.2 est valable pour ces éléments. D'autre part, il est facile d'obtenir les formules

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(a)_{(r-p)} =& \mathrm{P}_{(r-p)}(\sum_{i=p+1}^{r} a_i e_i) \\
\mathrm{Det}\mathrm{P}(a) =& (a_{p+1} \dots a_r)^{\frac{2n}{r}} \\
J_{\mathrm{P}(a)}(o_{p,q}) =& (a_{p+1} \dots a_r)^{dp}.
\end{aligned}$$

Maintenant on a: $\mathrm{P}(a)_{(r-p)} v_{\mathbf{n}} = a_{p+1}^{-2n_r} a_{p+2}^{-2n_{r-1}} \dots a_r^{-2n_{p+1}} v_{\mathbf{n}}$, puisque $v_{\mathbf{n}}$ est un vecteur de plus haut poids de l'espace $(\mathcal{P}_{(r-p)})_{\mathbf{n}}$. La relation (3) du lemme III.2 nous donne alors en $z = e$ les relations:

$$(I) \qquad \begin{array}{rcl}
-2n_r &=& 2s - dp + 2n/r - 2m_{r-p} \\
-2n_{r-1} &=& 2s - dp + 2n/r - 2m_{r-p-1} \\
\vdots && \\
-2n_{p+1} &=& 2s - dp + 2n/r - 2m_1
\end{array}$$

qui montrent que $s \leq -(n/r - dp/2) + m_{r-p}$, et que la donnée de s, p, et $\pi_{\mathbf{m}}$ détermine d'une manière unique $\mathbf{n}$; la démonstration du lemme III.2 prouve alors que la famille $(\psi_I(o_{p,q}))_{|I|=M}$ est unique à un facteur multiplicatif près; par la relation (1) de la démonstration du lemme III.2 il en de même de la famille $(\psi_I)_{|I|=M}$ sur $S_{pq} \cap W$. Maintenant, par les propositions IV.5 et IV.5', on sait qu'il existe une distribution U, homogène de degré s et de support de rang p contenant S_{pq}, le résultat précédent nous montre qu'il existe un scalaire a telle que la distribution $T - aU$ ne présente plus dans $S_{pq} \cap W$ de termes d'ordre M, ce qui entraine que $T = aU$ dans $S_{pq} \cap W$ et par homogénéité dans W_{pq} tout entier.

Plaçons nous maintenant dans le cas général où T vérifie la relation:

$$g.T = (\mathrm{Det} g)^{\frac{rs}{n}+1} \pi_{\mathbf{m}}(g) T + (\mathrm{Det} g)^{\frac{rs}{n}+1} \sum_{i=1}^{l} (\mathrm{Log}\mathrm{Det} g)^i \pi_{\mathbf{m}}(g) U_i$$

et suivons encore Ricci et Stein en reprenant la démonstration du lemme III.2. On montre facilement que dans W:

$$T = \sum_{m=0}^{M} \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m} Y_{i_1} \ldots Y_{i_m} \psi_I$$

ainsi que:

$$U_j = \sum_{m=0}^{M} \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m} Y_{i_1} \ldots Y_{i_m} \mu_{Ij}$$

où ψ_I et μ_{Ij} sont des fonctions régulières sur $S_{pq} \cap W$. Comme dans [Ri.-St], on montre ensuite que $\mu_{Ij}(o_{pq}) = 0$ ce qui nous permet de procéder comme dans le cas homogène.

Lemme V.2. *Soit T une distribution non nulle, G homogène de degré s, à valeurs dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$, et portée par l'origine. Le nombre s est alors nécessairement critique pour la représentation $\pi_{\mathbf{m}}$, avec*

$$s \leq -n/r + m_r.$$

De plus, une telle distribution est unique à une constante multiplicative près.

Soit en effet une distribution $T = \sum P_\alpha(\partial)\delta e_\alpha$ homogène de degré s et à valeurs dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$; la démonstration du lemme III.1 nous dit que tous les polynômes P_α sont homogènes de degré

$$l = -rs - n - |\mathbf{m}|.$$

et que le G^1 module engendré par eux est $\pi_{\mathbf{m}^1}$. Le G module engendré par les P_α est donc de la forme $(\det x)^a \mathcal{P}_{\mathbf{m}^1}$, où a est un entier positif tel que $l = ra + |\mathbf{m}| - rm_r$; il en résulte que:

$$s = -n/r + m_r - a$$

et par conséquent s est critique pour la représentation $\pi_{\mathbf{m}}$. Si maintenant (e_α) est une base orthonormée pour le produit de Fischer (voir par exemple [Fa.-Ko.] pour le produit de Fischer), la démonstration du lemme III.1 nous montre également que:

$$(\det x)^{-m_r} e_\alpha \mapsto (\det x)^{-a} P_\alpha$$

est G^1 équivariante, le lemme de Schur nous donne donc le résultat d'unicité.

Théorème V.3. *La dimension de l'espace $\mathcal{H}^s_{\mathbf{m}}$ est $r+1$.*

La démonstration est identique à celle du cas scalaire donnée dans [Ri-St.]. Indiquons en brièvement les grandes lignes dans le cas où l'entier d est pair.

Soit donc T un élément non nul de l'espace $\mathcal{H}^s_{\mathbf{m}}$ et supposons d'abord que s ne soit pas critique pour la représentation $\pi_{\mathbf{m}}$. Il résulte du lemme V.1 que la restriction de T à $V^\times$ est non nulle; par la démonstration du Théorème III.3, il existe des nombres $a_1, \dots, a_r$ tels que sur $V^\times$:

$$T = \sum a_i T_i^{\mathbf{m}}(,s).$$

s n'étant pas critique, on peut considérer la distribution $T - \sum a_i T_i^{\mathbf{m}}(,s)$ sur V tout entier; elle est portée par S et homogène et donc par le lemme V.1, s devrait etre critique; par conséquent on a sur V:

$$T = \sum a_i T_i^{\mathbf{m}}(,s).$$

On suppose maintenant que $s = s_0$ est critique et que la restriction de T à $V^\times$ soit non nulle. Considérons les distributions ($i = 0, 1, \dots, r$):

$$A_i^{\mathbf{m}}(.,s) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{s_0 j} j^i T_j^{\mathbf{m}}(.,s).$$

Le théorème IV.1 nous dit que la distribution $A_i^{\mathbf{m}}(.,s)$ présente en s_0 un pôle d'ordre $\min(i, o_{\mathbf{m}}(s_0))$. Ecrivons les développements de Laurent:

$$\begin{array}{lcllll}
A_0^{\mathbf{m}} & = & & & +A_{00}^{\mathbf{m}} & +\dots \\
A_1^{\mathbf{m}} & = & & \frac{A_{11}^{\mathbf{m}}}{s-s_0} & +A_{10}^{\mathbf{m}} & +\dots \\
\vdots & & & & & \\
A_h^{\mathbf{m}} & = & \frac{A_{hh}^{\mathbf{m}}}{(s-s_0)^h} \quad +\dots+ & \frac{A_{h1}^{\mathbf{m}}}{s-s_0} & +A_{h0}^{\mathbf{m}} & +\dots \\
\vdots & & & & & \\
A_r^{\mathbf{m}} & = & \frac{A_{rh}^{\mathbf{m}}}{(s-s_0)^h} \quad +\dots+ & \frac{A_{r1}^{\mathbf{m}}}{s-s_0} & +A_{r0}^{\mathbf{m}} & +\dots
\end{array}$$

avec $h = \min(r, o_{\mathbf{m}}(s_0))$.

Il n'est pas difficile, en utilisant le théorème IV.1, de voir que toute combinaison linéaire non nulle $\sum_{i=l}^{r} a_i A_{il}^{\mathbf{m}}$ ($l = 0, \dots, l = r$) est à support de rang $r - l$, en particulier la famille $A_{ll}^{\mathbf{m}}, A_{l+1l}^{\mathbf{m}}, \dots, A_{rl}^{\mathbf{m}}$ est linéairement indépendante. On montre que la distribution T est combinaison linéaire des distributions $A_{00}^{\mathbf{m}}, A_{11}^{\mathbf{m}}, \dots, A_{hh}^{\mathbf{m}}, \dots, A_{rh}^{\mathbf{m}}$: par le lemme V.1 on a sur $V^\times$:

$$T = \sum a_i A_{i0}^{\mathbf{m}}.$$

La distribution $U = T - \sum a_i A^{\mathbf{m}}_{i0}$, est une distribution de support à rang au plus $r-1$ et quasi-homogène de degré s_0; par le lemme V.1 sa restriction à l'ouvert $W_{r-1} = \cup_0^{r-1} W_{r-1q}$ est homogène, en traduisant tout cela on montre que $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$, ce qui entraine que $U = T - a_0 A^{\mathbf{m}}_{00}$ et donc homogène; nous sommes ramenés à une distribution homogène de support à rang au plus $r-1$; on continue ainsi de proche en proche: supposons que $h < r$, ainsi $h = o_{\mathbf{m}}(s_0)$, et donc on a l'égalité:

$$m_{o_{\mathbf{m}(s_0)}+1} - 1 - (o_{\mathbf{m}(s_0)})d/2 < s_0 \leq m_{o_{\mathbf{m}(s_0)}} - 1 - (o_{\mathbf{m}(s_0)} - 1)d/2$$

à la dernière étape, nous serons en présence d'une distribution quasi-homogène à support de rang au plus $r-h-1$ de la forme $U - \sum a_i A^{\mathbf{m}}_{ih}$, mais le lemme V.1 impliquerait alors que

$$s_0 \leq m_{o_{\mathbf{m}(s_0)}+1} - 1 - (o_{\mathbf{m}(s_0)})d/2$$

ce qui n'est pas, et par conséquent $U - \sum a_i A^{\mathbf{m}}_{ih} = 0$; si maintenant $h = r$, nous arrivons à la dernière étape à une distribution s_0 homogène portée par l'origine, on sait qu'une telle distribution est unique à un scalaire près et que donc elle est proportionnelle à $A^{\mathbf{m}}_{rr}$. Cela donne le résultat pour d pair.

La démonstration pour le cas d impair est analogue, on remplace les distributions $A^{\mathbf{m}}_i(.,s)$ par les distributions $A^{\mathbf{m}}_i(.,s)$ $(0 \leq i \leq E(\frac{r}{2})$; $E(x)$ désignant la partie entière de x) et $B^{\mathbf{m}}_i(.,s)$ $(0 \leq i \leq E(\frac{r-1}{2}))$ données par:

$$A^{\mathbf{m}}_l(.,s) = \sum_{j \equiv 0[2]} \exp(-i\pi j s_0) j^l T^{\mathbf{m}}_j(,s)$$

et

$$B^{\mathbf{m}}_l(.,s) = \sum_{j \equiv 1[2]} \exp(-i\pi j s_0) j^l T^{\mathbf{m}}_j(,s).$$

Désignons par $\mathcal{E}_{\mathbf{m}}$ l'espace vectoriel engendré par les distributions $A^{\mathbf{m}}_h(.,s)$ (où s prend toutes les valeurs critiques pour $\pi_{\mathbf{m}}$, $1 \leq h \leq \alpha$, et où $A^{\mathbf{m}}(.,s)$ est une combinaison linéaire quelconque des $\Phi^{\mathbf{m}}_j(.,s)$) du paragraphe IV.

Théorème V.4. *Soit* $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_{r-1}, 0)$, *alors le sous espace vectoriel des éléments à support singulier de* $\mathcal{I}_{\pi_{\mathbf{m}}}$ *est l'espace* $\mathcal{E}_{\mathbf{m}}$.

Soit T un élément non nul de $\mathcal{I}_{\pi_{\mathbf{m}}}$, à support de rang $0 < p < r$ contenant S_{pq}; on reprend les considérations du lemme V.1, en prenant des éléments a de la forme $a = \mathrm{P}(o_{p,0} + \sum_{i=p+1}^r a_i e_i)$ (a_i positifs non nuls tels que $a_{p+1} \ldots a_r = 1$). Au lieu des relations (I), on trouve alors:

$$\begin{array}{rcl} n_{r-1}-n_r & = & m_{r-p-1}-m_{r-p} \\ n_{r-2}-n_r & = & m_{r-p-2}-m_{r-p} \\ \vdots & & \\ n_{p+1}-n_r & = & m_1-m_{r-p}. \end{array}$$

Les entiers $n_{r-1}-n_r, \ldots, n_{p+1}-n_r$ sont donc parfaitement déterminés par la donnée de p et de $\mathbf{m}$, de plus l'ordre de transversalité M et l'entier n_r sont reliés par l'équation:

$$M-(r-p)n_r = m_1+\ldots+m_{r-p}-(r-p)m_{r-p}.$$

Tout ceci montre comme dans le lemme V.1, que la famille $(\psi_I(o_{p,q}))_{|I|=M}$ est unique à un facteur multiplicatif près. Prenons s tel que: $s=-(n/r-dp/2)+m_{r-p}-n_r$, on sait qu'il existe une distribution U homogène de degré s et de support de rang p contenant S_{pq}, le résultat précédent nous montre qu'il existe un scalaire a telle que la distribution $T-aU$ ne présente plus dans $S_{pq}\cap W$ de termes d'ordre M, ce qui entraine que l'ordre de transversalité de $T-aU$ est inférieur à M dans W_{pq} tout entier. On conclut alors par récurrence.

Remarque V.5: Dans [Kol.-Va.1], les auteurs font agir les opérateurs différentiels multiplication par det$x$ et det(∂) (ces deux opérateurs engendrant une algèbre de Lie isomorphe $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$) sur l'espace $\mathcal{E}_{\mathbf{m}}$, obtenant ainsi des $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modules interessants: il apparait en particulier des modules qui ne sont pas à poids. J.A.C.Kolk et V.S. Varadarajan étudient et caractérisent (algébriquement) ces modules. Dans le cas d'une algèbre de Jordan simple et euclidienne générale, l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs différentiels det$x$ et det(∂) n'est plus de dimension finie (cf.[Ru.]), mais on peut constater pour les modules $\mathcal{E}_{\mathbf{m}}$ des propriétés similaires au cas étudié dans [Kol.-Va.1]. Il serait peut-être interessant d'essayer de caractériser ces modules.

BIBLIOGRAPHIE

[Bl.1] B. Blind: Distributions homogènes sur une algèbre de Jordan
(Bull. Soc. math. France, 125, 1997, 493-528).
[Bl.2] B. Blind: Fonctions zeta à plusieurs variables associées aux algèbres de Jordan simples euclidiennes.
(C.R.Acad.Sc.Paris, 311,1990, 215-217).
[Br.-Koe.] H.Braun, M.Koecher: Jordan-Algebren.
(Springer Verlag 1966).
[Fa.-Ko.] J.Faraut, A.Koranyi: Analysis on Symmetric Cones.

(Clarendon Press, 1994).
[Hi.-Ne.] J.Hilgert, K.-H.Neeb: Vector valued Riesz distributions on Euclidean Jordan Algebras.
(Jour. Geom. Anal. 11, 2001, 43-75).
[Ka.] S.Kaneyuki: On the causal structures of the Shilov boundaries of symmetric bounded domains.
(Prospects in complex geometry, Proceedings, Katata/Kyoto, 1989, J.Noguchi, T.Ohsawa (Eds), Lec. notes in Math., 1468, Springer, 127-159).
[Kol.-Va.1] J.A.C.Kolk, V.S. Varadarajan: Lorentz invariant distributions supported on the forward light cone.
(Compositio Math. 81,1992, 61-106).
[Kol.-Va.2] J.A.C.Kolk, V.S. Varadarajan: Riesz Distributions
(Math. Scand. 68, 1991,273-291).
[Mu.] M.Muro: Invariant hyperfunctions on regular prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type.
(Tôhoku Math. Jour. 42, 1990, 163-193).
[Ra.-Sc.] S. Rallis, G. Schiffmann: Distributions invariantes par le groupe orthogonal
(Analyse Harmonique sur les Groupes de Lie Séminaire Nancy-Strasbourg 1973/75, P.Eymard, J. Faraut, G. Schiffmann, R.Takahashi (Eds), Lec. notes in Math., 497, Springer, 1975, 494-642).
[Ri.-St.] F.Ricci, E.Stein: Homogeneous distributions on spaces of Hermitean matrices
(Jour. für die reine und ang. Math. 368, 1986, 142-164).
[Ru.] H. Rubenthaler: Une dualité de type Howe en dimension infinie
(C.R.Acad.Sc.Paris, 314,1992, 435-440).
[Sa.1] I.Satake: Algebraic Structures of Symmetric domains.
(Iwanami-Shoten and Princeton Univ. Press, 1980).
[Sa.2] I.Satake: On zeta functions associated with self dual homogeneous cones.
(Reports on Symposium of Geometry and Automorphic Functions, Tôhoku Univ., Sendai, 1988, 145-168).
[Sa.-Fa.] I.Satake, J.Faraut: The functional equation of zeta distributions associated with formally real Jordan algebras.
(Tôhoku Math. Jour. 36, 1984, 469-482).
[Sa.-Sh] M.Sato, T.Shintani: On zeta function associated with prehomogeneous vector spaces.
(Ann. of Math. 100, 1974, 131-170).
[Sp.] T.A. Springer: Jordan Algebras and Algebraic Groups.
(Springer, Ergebn. der Math. und ihrer Grenz., 75, 1973).
[Ze.] D.P. Zelobenko: Compact Lie Groups and their Representations.
(AMS, Trans. Math. Mono. Vol 40, 1973).